# Notes sur l'histoire des mathématiques.

Par

H.-G. Zeuthen.

(Suite[1]), présentée aux séances du 24 février et du 20 octobre 1893.)

---

## II. *Tartalea contra Cardanum;* réplique relative à la question de priorité sur la résolution des équations cubiques.

Au commencement de l'âge moderne, le développement des mathématiques a repris un essor inconnu depuis la première période alexandrine. L'étendue de leurs nouveaux progrès est due en grande partie à l'invention de l'art de l'imprimerie, qui répandait toute découverte avec une rapidité jusqu'alors inouïe et rendait immense le champ des nouvelles suggestions dont tout progrès porte le germe. En même temps les nouvelles victoires étaient convenablement préparées par le modeste travail des siècles précédents. Ce travail était avant tout de pure réceptivité. On avait appris des Arabes une partie de la géométrie grecque ainsi que les procédés algébriques qu'elle avait produits sous l'influence du calcul indien. On avait même commencé de puiser ses connaissances de la géométrie grecque dans les travaux originaux et dans des traductions immédiates, et l'on travaillait déjà à s'affranchir de ses maîtres grecs et arabes sous

---

[1]) Voir page 1, année 1893 du Bulletin.

le rapport de l'emploi des instruments analytiques qu'on leur devait. Plus on apprenait à connaître les auteurs grecs, plus cet usage libre des méthodes transmises avait lieu de se développer. En effet, la forme rigoureuse des anciens, qui assure la justesse de leurs résultats contre toute objection, n'est pas propre à montrer comment on y parvient et comment on peut en obtenir de semblables. On avait donc besoin d'un travail indépendant pour y pénétrer. En même temps la grande difficulté de ce travail et l'impossibilité de bien fonder ses propres résultats modestes devaient augmenter la vénération qu'inspirait les anciens travaux grecs.

Ce sentiment devait avoir pour les Européens, comme il l'avait eu pour les auteurs grecs de la fin de l'antiquité et pour les Arabes, quelque chose d'humiliant qui n'était pas favorable au progrès. Pour gagner la confiance en ses propres forces, si nécessaire pour les rendre bien disponibles, il fallait l'encouragement de se voir capable de trouver quelque chose qui fût inconnu aux maîtres vénérés. Voilà ce qui explique comment la découverte de la résolution des équations du troisième degré dans la première moitié du XVI[e] siècle donna le signal d'un développement nouveau et rapide de toutes les branches des mathématiques pures et appliquées. Il suffit de citer les Viète, les Galilée, les Keppler, les Néper, les Fermat et les Descartes pour rappeler la diversité des directions de ce nouveau développement et sa grande importance.

L'histoire de la découverte de la résolution des équations cubiques a donc un grand intérêt. En y discutant le droit de priorité des divers auteurs, on a lieu de juger en même temps de la valeur des différentes contributions indirectes à cette résolution, qui étaient aussi des contributions essentielles aux progrès ultérieurs. Cette découverte a donc beaucoup intéressé les historiens des mathématiques. Notre époque a vu affluer d'abondants apports qui ont élucidé cette histoire, et M. Cantor en a rendu compte[1]) avec la consciencieuse exactitude qui lui est propre. A son aperçu de l'époque en question, je n'ai que peu de faits à ajouter ici; mais quant à juger l'importance des divers faits, leurs relations mutuelles, leurs rapports avec les idées énoncées antérieurement, enfin la valeur des contributions des différentes personnes, je diffère assez de M. Cantor pour désirer mettre une grande partie de ces faits dans un nouveau jour.

Il est nécessaire de commencer par jeter un coup d'œil rapide sur les antécédents historiques de la question qui va nous occuper. La connaissance des vains efforts faits antérieurement pour trouver cette résolution, exalte le mérite des géomètres qui y ont réussi au delà des limites qu'on pouvait s'imaginer alors. Nous ne croyons pas nous être trompé en déduisant la dénomination ancienne de *problèmes solides* du fait que ces problèmes dépendent d'équations qui, dans l'ancienne algèbre géométrique, devaient être représentées par des figures stéréométriques[2]). Alors le premier procédé à essayer pour résoudre ces problèmes, devrait être de les réduire à déterminer deux moyennes géométriques ou bien les racines cubiques. En cas de réussite, cette réduction serait identique à la résolution trouvée au XVI[e] siècle.

Quoi qu'il en soit, Archimède, dans son second livre sur la sphère et le cylindre, réduit la division d'une sphère en deux segments d'un rapport donné, à l'équation cubique

$$x^2(a-x) = b^2c,$$

qu'il représente, bien entendu, géométriquement et que pour cette raison nous pourrons aussi bien rendre par

$$(a-y)^2 y = b^2 c,$$

---

[1]) *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* II, p. 441—499.

[2]) Voir mon travail sur *Keglesnitslæren i Oldtiden,* Mémoires de l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark, 6[e] Série, t. III, p. 149 et s., et p. 166 et s.; ou l'édition allemande: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* p. 226 et s., et p. 253 et s.

ce que nous aurons lieu de faire dans ce qui suit. Il aurait été, évidemment, bien content de réduire ce problème à la détermination de deux moyennes géométriques, comme il l'a fait pour un autre problème solide du même livre (n° 5). La résolution grecque de ladite équation qui nous est conservée par Eutocius et qu'on attribue à Archimède, ne consiste au contraire qu'en une construction par les sections coniques analogue à celle des deux moyennes géométriques. Cette résolution, qui n'est pas très utile pour la véritable détermination de l'inconnue, $x$, a conduit à démontrer que $x^2(a-x)$ [ou $(a-y)^2 y$] prend ici une valeur *maxima* pour $x=\frac{2}{3}a$ [ou $y=\frac{1}{3}a$], et que la valeur *maxima* est égale à $\frac{4}{27}a^3$. Comme les déterminations de cette nature étaient le but principal des constructions des Grecs, les solutions des problèmes solides par les sections coniques les ont tellement satisfaits, qu'ils ont perdu tout intérêt à réduire ces problèmes à l'extraction de racines cubiques [1]).

Les auteurs arabes qui s'occupent d'équations cubiques, imitent la manière des Grecs de les résoudre par des coniques. Bien qu'ils n'aient pas toujours en vue la véritable utilité théorique qui portait les Grecs à s'en contenter, ils ont donné à cette étude plus d'étendue que les auteurs grecs restants. D'après la direction plus algébrique des Arabes, il est impossible qu'ils n'aient pas joint à ces études des efforts pour résoudre algébriquement aussi ces mêmes équations. Une preuve de ces efforts est dans l'équation proposée à Léonard de Pise et dont parle ma note [2]) précédente. Nous avons vu, en effet, que si Léonard en a entrepris une résolution approximative, c'est seulement après avoir essayé de la résoudre exactement

[1]) A côté du *Keglesnitslæren i Oldtiden*, je pourrai citer ici une «Note sur la résolution géométrique d'une équation du troisième degré par Archimède». Je viens de publier cette note dans la *Bibliotheca mathematica*, 1893, n° 4. Voir aussi mon nouveau livre intitulé *Forelæsning over Mathematikens Historie, Oldtid og Middelalder*. Kjøbenhavn 1893, p. 190—192.

[2]) Voir p. 1—17 du présent Bulletin.

par les quantités irrationnelles d'Euclide. Il existe plusieurs preuves qu'après le temps de Léonard on a continué en Europe les essais de résoudre algébriquement les équations cubiques et même d'ordre supérieur, et que ces essais ont conduit aux solutions de certaines formes particulières. Dans ce qui suit, nous aurons à renvoyer à un de ces essais.

Le premier qui ait dû trouver une véritable résolution d'une équation cubique assez générale, est Scipion del Ferro, professeur à Bologne de 1496 à 1526. D'après une relation que tend à confirmer tout ce qu'on en sait, Ferro avait découvert une formule générale pour résoudre les équations de la forme
$$x^3 + ax = b.$$
Les quantités négatives n'étant pas en usage à l'époque qui nous occupe, nos lettres désignent exclusivement des quantités positives — ici et dans la suite, partout où nous ne disons pas expressément le contraire. Malheureusement Scipion n'a jamais publié sa résolution; il ne l'a communiquée qu'à son gendre et son successeur Annibale della Nave et à un certain Fiore. L'usage qu'en a fait ce dernier, servira à nous donner l'explication de cette cacherie. Les savants d'alors faisaient comme les inventeurs industriels de nos jours, qui cachent leurs inventions afin de profiter de leurs applications, tandis que de nos jours les savants ont parfois trop grande hâte de publier leurs inventions afin de s'en assurer la priorité.

La résolution avait donc besoin d'être réinventée. La nouvelle découverte fut faite en 1535 par Tartaglia, à l'occasion d'un duel scientifique auquel il avait été provoqué par ledit Fiore. Ces duels scientifiques jouaient un rôle assez considérable à l'époque qui nous occupe. Les deux adversaires se posaient, l'un à l'autre, un certain nombre de questions, et déposaient en même temps une somme qui devait être la récompense de celui qui, dans un délai fixé, aurait résolu le plus grand nombre de questions. Toutefois le vrai prix du vainqueur était l'honneur, et la recommandation qu'il obtenait pour devenir professeur aux universités. Tartaglia avait eu antérieurement lieu de s'occuper d'équations cubiques à l'occasion de questions qui lui avaient été proposées, en 1530, par un certain da Coi, et dont nous aurons à parler aussi. Au commencement, Nicole Tartaglia de Brescia, qui nous a laissé plusieurs preuves de son génie pour les mathématiques, surtout pour la géométrie, ne se souciait guère du défi de Fiore, qu'il savait être un calculateur sans connaissances réelles des mathématiques; mais ayant appris que Fiore devait à un maître défunt une formule servant à la résolution des équations de la forme déjà citée, il prit l'affaire plus au sérieux. Il se prépara donc au combat par une nouvelle étude d'équations de cette forme, et réussit à en trouver à temps la résolution générale. Immédiatement après, il trouva aussi celle d'équations de la forme

$$x^3 = ax + b.$$

Il était donc en état de proposer à Fiore, à côté de questions touchant différentes parties des mathématiques, des équations de chacune de ces deux formes [1]) et de résoudre en deux heures toutes les 30 questions de Fiore, qui étaient des exemples d'équations de la première des deux formes.

Ni Tartaglia non plus n'a publié les résolutions de ces équations; mais sa victoire excita au plus haut degré la curiosité des savants. Surtout Jérôme Cardan, le celèbre médecin, géomètre et philosophe de Milan, dont les œuvres publiées forment une collection gigantesque, brûlait de les connaître. Il réussit enfin en 1539 à persuader à Tartaglia de les lui communiquer; mais il dut préalablement jurer solennellement de ne les pas publier. Malgré son serment il les publia en 1545 dans son *Ars magna de rebus Algebraicis* [2]), toutefois en avouant qu'il devait à *son ami Tartaglia* la résolution de

---

[1]) Tartaglia: *Quesiti*, p. 236.

[2]) *Cardani Opera*, t. IV.

$x^3 + ax = b$. Cela n'a pas empêché que depuis cette publication la résolution porte le nom de *formule de Cardan*.

Tartaglia avait bien à se plaindre de cette conduite de Cardan, et il ne s'en fit aucunement faute. Ses plaintes de toutes les fatalités qui l'avaient rencontré depuis sa naissance, ont excité dans notre siècle beaucoup de sympathie pour le malheureux génie. Tartaglia est un sobriquet attiré à son porteur par un bégayement résultant d'une terrible contusion que dans la première enfance il reçut d'un soldat français; pendant toute sa vie il eut à lutter rudement pour son existence; il se trouva en butte à des déceptions perpétuelles, dont la plus cruelle fut de se voir voler, comme on l'a dit ci-dessus, le fruit de sa plus belle découverte. Toutefois la sympathie commença à se refroidir quand on s'aperçut que, non seulement un grand nombre des malheurs de Tartaglia étaient les conséquences naturelles de sa propre conduite, mais que même la véracité de ses rapports mérite souvent aussi peu de créance que la parole donnée par Cardan. C'est ce qui appert surtout de la découverte, faite par notre collègue M. Heiberg, savoir que Tartaglia n'avait jamais été en possession du texte grec d'après lequel il disait avoir traduit l'hydrostatique d'Archimède, et que cette traduction n'était qu'une nouvelle édition de celle de Moerbecke. Aussi sa prétention d'avoir résolu en 1530 les questions de da Coi est-elle insoutenable, ce que nous montrerons tout à l'heure.

L'histoire des parts respectives de Tartaglia et de Cardan à la résolution des équations cubiques avait donc grand besoin d'une revision. A cet effet M. Cantor a entrepris de comparer les apports faits ultérieurement par ces deux auteurs, pour utiliser les résolutions que Tartaglia a communiquées à Cardan, résolutions qui ne comprennent immédiatement qu'une partie des équations cubiques. Je reviens tout à l'heure à cette comparaison; mais je préfère commencer par discuter l'argument principal qui porte M. Cantor à se ranger à l'opinion suivante, déjà insinuée par l'élève de Cardan, Louis Ferrari, dans ses véhéments *Cartelli.* Cette opinion a de nouveau trouvé, dans notre siècle, des fauteurs tels que MM. Gherardi et Curtze. D'après cette opinion Tartaglia aurait simplement volé sa résolution de l'équation $x^3 + ax = b$ à Scipion del Ferro.

Ferrari prétend qu'en 1542, se trouvant à Bologne lui et Cardan, le successeur et le gendre de Scipion leur a montré un manuscrit laissé après son beau-père et contenant une résolution de cette équation. M. Cantor a sans doute raison de supposer cette résolution identique à celle de Tartaglia; autrement Cardan aurait profité de la différence pour avoir une résolution à publier sans violer sa parole à Tartaglia. Or, continue M. Cantor, la suite de l'histoire des mathématiques a montré qu'il est possible de résoudre l'équation en question de beaucoup de manières différentes: il renvoie en particulier aux résolutions de Viète et de Tschirnhausen, et tient conséquemment pour très invraisemblable que Tartaglia ait retrouvé précisément la résolution de Scipion del Ferro.

Il me semble qu'il y a une méprise dans cette argumentation. La différence des procédés qui peuvent servir à résoudre les équations cubiques, porte uniquement sur l'*analyse* par laquelle on déduit de l'équation la règle de calcul ou la formule servant à exprimer les racines par les coefficients de l'équation; elle n'a pas égard à cette règle ou formule elle-même, dont l'usage ferait la *synthèse* de la résolution. Or Tartaglia n'a communiqué à Cardan aucune analyse de l'équation $x^3 + ax = b$, mais seulement la règle suivante de calcul: déterminez $u$ et $v$ par les équations $u - v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$; alors $x$ sera égal à $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Cette règle exprimée ici en signes modernes peut avoir été représentée par Scipion del Ferro et par Tartaglia dans des formes un peu différentes; mais même en supposant que les deux découvertes de la résolution soient absolument indépendantes l'une de l'autre, ces formes n'ont pu être assez différentes pour cacher à Cardan et à Ferrari, très versés alors dans l'usage de la formule de Tartaglia, l'identité des calculs prescrits. On ne saurait donc rien conclure de l'identité des résolutions de Tartaglia et de Scipion, identité qui est inévitable, parce que la résolution n'est qu'une découverte de la nature des quantités irrationnelles satisfaisant aux équations cubiques.

Il me semble même impossible que Cardan ait pu partager l'avis de M. Cantor sur un vol de la part de Tartaglia. Il s'en serait servi pour se débarrasser plus directement de la responsabilité de la rupture du serment que ne le fait son élève dans son cartel. Dans son livre de 1545 il se serait référé simplement au manuscrit qu'on lui avait montré trois ans auparavant à Bologne. Cette circonstance nous rend même un peu suspect le récit de Ferrari, dont la véracité égale peut-être celle de Tartaglia et de Cardan.

Je regarde donc comme essentiel qu'il n'existe qu'une seule résolution de l'équation $x^3 + ax = b$. Pour la connaître, il suffit même de connaître la résolution exacte d'une seule équation numérique où les valeurs données ne permettent aucune réduction des irrationnalités. Il est donc assez naturel que Tartaglia, ne voulant par communiquer sa formule générale, ne veuille communiquer ni à da Coi ni à Cardan ses résolutions des différentes équations numériques proposées par Fiore [1]).

Nous pourrons même étendre cette considération à plusieurs autres formes d'équations et en tirer plusieurs conclusions historiques.

Commençons par l'appliquer aux questions proposées en 1530 par da Coi à Tartaglia. Il demandait la résolution des équations

$$x^3 + 3x^2 = 5$$

et

$$x^3 + 6x^2 + 8x = 1000.$$

[1]) *Quesiti*, p. 236 et 250.

Il est à peu près certain que ni l'un ni l'autre n'ont su les résoudre avant les découvertes de Tartaglia en 1535. En effet, vu la forme des quantités irrationnelles de la résolution de ces équations, nous ne savons guère nous imaginer un procédé possible alors et qui ne consistât pas en une réduction aux formes $x^3 \pm ax = b$. Cette réduction se ferait pour la première équation par la substitution de $y = x + 1$ ou $y = \frac{1}{x}$; pour la seconde on l'obtiendrait par un autre choix de l'inconnue. Quoi qu'il en soit, l'intérêt qu'avaient excité les équations du troisième degré porterait à essayer d'appliquer les mêmes artifices qui avaient conduit à la résolution de ces équations particulières à d'autres équations du même degré, et cet essai devrait réussir pour les mêmes formes dont Tartaglia ne trouva la résolution qu'en 1535. Tartaglia avait donc raison de reprocher à da Coi de proposer des questions qu'il ne savait pas résoudre lui-même; mais c'est à tort qu'il se vante de connaître lui-même depuis 1530 la résolution des équations de la forme $x^3 + ax^2 = c$. Nous nous rangeons à l'avis de M. Cantor que les connaissances de Tartaglia à cet égard se bornaient alors aux équations suivantes, dont les deux premières questions proposées en 1535 à Fiore sont des exemples [1]),

$$x^3 + ax^2 = r$$

et

$$ax^2 - x^3 = r,$$

où nous désignons par $a$ un nombre donné, 40, dans l'une des deux questions, et 30 dans l'autre, tandis que $r$ doit être un nombre rationnel convenablement choisi, et la racine $x$ une quantité irrationnelle (par des racines carrées).

A côté de ces questions, Tartaglia présenta à Fiore les équations $x^3 + 4x = 13$ et $x^3 - 3x = 10$, exemples des deux formes dont il venait de trouver les résolutions, et il dit que les autres appartenaient aux différentes parties de la géométrie et de l'algèbre. Cette variété manque entièrement aux

---

1) *Quesiti,* p. 236.

30 questions posées par son adversaire[1]). Ce sont toutes des équations de la forme $x^3 + ax = b$, et si peu variées que même dans 27 d'entre elles le coefficient $a$ a pour valeur 1. Il est vrai que, dans plusieurs des questions, il attribue aux nombres $x^3$ et $x$ des dénominations différentes les unes des autres. Dans une question, $x^3$ et $x$ désignent les prix d'un diamant et d'un rubis; dans d'autres ils représentent des quantités géométriques; mais dans aucune des questions ce déguisement n'a demandé la moindre connaissance de la géométrie ou de l'algèbre. En réalité Fiore n'a donc fait que poser 30 fois une seule et même question, celle dont Scipion Ferro lui avait communiqué la résolution. En résolvant une de ses questions, son adversaire serait en état d'appliquer le même procédé pour résoudre les 29 autres; mais pour y parvenir il fallait refaire l'immense découverte de Scipion. Fiore pouvait donc espérer bonne chance, pourvu qu'il sût répondre seulement à une ou deux des questions de Tartaglia.

La nature des questions de Fiore doit laver Tartaglia de tout soupçon d'avoir fait tort à Fiore dans son rapport sur leur duel scientifique. La réinvention de la résolution de l'équation $x^3 + ax = b$ a rendu facile au premier la réponse aux questions de Fiore, tandis que la connaissance de la même résolution n'aurait permis à Fiore de résoudre qu'une seule des questions de Tartaglia. Il semble même avoir été trop effrayé de voir sa seule ressource parvenir à la connaissance de Tartaglia pour trouver cette résolution.

La connaissance des questions de Fiore nous est assez importante à cause du jour dans lequel elle place la résolution de Scipion del Ferro. En voyant le grand nombre d'équations de la forme $x^3 + x = b$, on serait au premier abord tenté de ne lui attribuer que la résolution d'équations de cette forme et de croire que Fiore n'avait ajouté que par une

---

[1]) *Quesiti*, p. 251.

méprise 3 équations d'une autre forme; mais, comme la valeur 1 du coefficient de $x$ ne comporte aucune simplification de la nature des quantités irrationnelles déterminées par l'équation, nous croyons impossible d'inventer une résolution de cette forme particulière qui ne conduirait pas immédiatement à celle de toutes les équations $x^3 + ax = b$. De même que M. Cantor, nous sommes donc porté à regarder Scipion del Ferro comme le véritable inventeur de cette résolution générale. Non seulement il a eu la priorité sur Tartaglia, mais celui-ci a eu, pour retrouver la résolution, un secours puissant dans sa connaissance du fait que cette résolution existait et qu'elle avait été déjà trouvée par Scipion. En même temps il faut rappeler toutefois que le même secours était à la disposition de Cardan, sans que pour cela il pût s'en servir pour retrouver la même résolution malgré tous les efforts qui ont dû accompagner l'insistance grâce à laquelle il réussit enfin à persuader à Tartaglia de la lui communiquer. Cette différence, qui a égard à la découverte propre de la résolution des équations cubiques, me semble, dans la comparaison des deux hommes, l'emporter sur tous les progrès dus plus tard à Cardan.

Avant d'en parler, j'ai encore quelques mots à dire sur la résolution de l'équation $x^3 = ax + b$, que Tartaglia trouva immédiatement après celle de l'équation $x^3 + ax = b$. L'idée de poser dans ce cas-là $u + v = b$, $uv = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ et $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, s'associe de si près à la résolution déjà trouvée de la dernière équation, que, sans doute, il n'en faut pas faire grand cas. Mais comment Scipion Ferro aurait-il trouvé la résolution de $x^3 + ax = b$, sans trouver aussi celle de l'équation $x^3 = ax + b$? Du moins résulte-t-il des questions de Fiore que Scipion ne lui en a rien communiqué. Je ne vois de ce fait qu'une seule explication, qui a toutefois l'avantage d'expliquer en même temps la conduite ultérieure de Tartaglia envers Cardan. Telle que la donne Tartaglia, et que nous l'avons citée, la résolution de l'équation $x^3 = ax + b$ est incomplète et seulement applicable au cas où $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{a}{3}\right)^3$. Néanmoins il n'était pas permis de faire de cette condition un *diorisme* limitant la possibilité de la question: il n'a pas été difficile de se persuader par des exemples numériques que la possibilité de la question ne cesse nullement au cas de $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{3}\right)^3$, où la résolution trouvée fait défaut, ou bien dans le cas qui devait plus tard se définir cas irréductible. Il y avait donc une raison pour différer la communication d'une méthode qui n'était applicable qu'à une partie des équations de ladite forme.

Tartaglia, qui s'était déjà vanté d'une résolution infiniment moins complète de l'équation $x^3 + ax^2 = b$, se faisait peu de scrupule de se vanter d'une résolution de l'équation $x^3 = ax + b$, qu'il a pu croire complète au premier abord. Plus tard il l'a aussi communiquée à Cardan dans les mêmes vers où il lui décelait — d'une manière qui demandait encore une explication ultérieure — la résolution de $x^3 + ax = b$. A cette époque il aura eu, toutefois, beaucoup d'occasions d'observer les limites de l'application de sa méthode découverte depuis 4 ans, et sans doute il se sera déjà efforcé de trouver une résolution applicable aussi au cas irréductible. Ces efforts expliqueront, beaucoup mieux que ne le fait la traduction d'Euclide qu'il prend pour prétexte, pourquoi il ajourne toujours de publier le travail qui devait contenir ses découvertes sur les équations du troisième degré: on comprend bien son désir d'y rendre toutes les résolutions complètes. On comprend aussi qu'au moment où Cardan, poursuivant ses questions, touche au cas irréductible, Tartaglia arrête subitement ses communications et se borne à rappeler à Cardan ses promesses solennelles de ne le pas devancer en publiant les résolutions communiquées [1]. On comprend aussi tous ses sentiments à la vue du livre où Cardan publie à la fois ces

---

[1] *Quesiti,* p. 272.

mêmes résolutions et de nouveaux procédés servant à les rendre applicables à toutes les formes d'équations cubiques, à l'exception de celles qui appartiennent au cas irréductible, ou s'y réduisent.

M. Cantor est d'avis qu'il aurait dû s'incliner, admirer le génie de l'auteur et se contenter de la mention honorable qu'il en avait obtenue lui-même. Ce jugement, énoncé trois siècles et demi après la publication de l'*Ars magna*, montre jusqu'à quel point l'élaboration, faite avec assez de talent par Cardan de la résolution retrouvée par Tartaglia, a dérobé à ce dernier savant l'honneur de cette grande découverte. Ses vains efforts pour trouver une résolution embrassant aussi le cas irréductible, sont cause qu'il a laissé à un autre, qui ne savait pas mieux surmonter les difficultés de ce cas, le soin d'exploiter cette découverte, et par là fait oublier au plus éminent historien des mathématiques de notre temps le véritable siège des difficultés des équations cubiques.

Afin de justifier mon jugement si différent de celui de M. Cantor, je dois montrer que les différents mérites de Cardan vis-à-vis de la théorie des équations cubiques, et dont M. Cantor rend compte avec son soin ordinaire, ne sont nullement comparables à la découverte de Tartaglia de la véritable nature des quantités irrationnelles servant à résoudre ces équations. En bornant cette comparaison à ce qui est la propriété de Cardan, je n'aurai pas à parler de la résolution faite par son élève Ferrari, de l'équation biquadratique, résolution que Cardan communique dans son *Ars magna*. Quant à cette résolution, je me borne à faire remarquer qu'après la résolution des équations cubiques, ce dernier pas était beaucoup plus facile, ainsi qu'on peut le constater par des raisons mathématiques et historiques. Il suffira peut-être de renvoyer ici au fait qu'il l'a suivie de très près.

Dans ma discussion des progrès dus à Cardan, je commence par considérer la réduction de l'équation cubique générale

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

à la forme trinôme

$$x^3 + bx + c = 0, \tag{2}$$

$a$, $b$ et $c$ désignant ici des nombres donnés, positifs ou négatifs. Cardan le fait de la même manière qui est en usage aujourd'hui. Il se sert de la substitution de $x = y - \frac{a}{3}$, ou bien il prend pour inconnue dans la première équation, $x + \frac{a}{3}$. Je crois que cette réduction se présenterait assez facilement à tout habile géomètre de son temps, qui aurait à résoudre une équation de la première forme et connaîtrait la résolution des équations de la seconde forme. En effet, le moyen indiqué est le même qu'on savait appliquer depuis longtemps à la résolution d'une équation du second degré. Même sans connaître déjà la résolution de l'équation (2), il a donc été naturel d'essayer de l'appliquer à la résolution de l'équation (1)[1]. On n'est pas renvoyé à de pures spéculations mathématiques pour vérifier cette opinion: il existe des preuves historiques de sa justesse. A cet égard, nous nous contenterons de renvoyer à un manuscrit du XIV$^e$ siècle publié par Libri et cité par M. Cantor[2]. L'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx = k$$

y est résolue par $x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \frac{k}{a}} - \frac{c}{b}$, ce qui n'est juste que dans le cas où $b^2 = 3ac$. On voit qu'alors l'équation donnée sera réduite à une équation cubique pure par la substitution de $y = x + \frac{c}{b} = x + \frac{b}{3a}$, ou bien par le même artifice qui sert en général à éloigner le terme du second degré. L'essai même de réduire une équation cubique à une équation pure, essai par lequel il était naturel de commencer, a ainsi conduit à la réduction de Cardan qui nous occupe, et si, avant

[1]) Par les premières lignes de l'article de M. Gram sur l'équation cubique de Léonard de Pise (ce Bulletin, p. 18) je vois qu'il partage mon avis à cet égard.

[2]) Voir en particulier Libri: *Histoire des sciences mathématiques en Italie* t. III, p. 316—317, et Cantor t. II, p. 147—148.

lui, nous n'en entendons guère, c'est que cette réduction ne servait en général à rien avant les découvertes de Ferro et de Tartaglia.

Je dis même qu'à l'époque qui nous occupe il était moins nécessaire de l'énoncer formellement que de nos jours. En effet, l'histoire des mathématiques nous apprend qu'aux temps où la technique algébrique était peu développée, on a su y suppléer par le choix convenable de l'inconnue. Or, la réduction à la forme (2) ne consiste qu'en un nouveau choix de l'inconnue. On aura su s'en servir pour y réduire les questions qui se traduiraient immédiatement par notre équation (1), et pour les questions qui n'avaient pas encore la forme d'équations, l'on choisirait tout de suite une inconnue dépendant d'une équation de la forme (2). Il est vrai qu'en 1535, lorsque da Coi posa à Tartaglia la question suivante: «Trouver trois termes d'une série arithmétique ayant pour différence 2 et dont le produit soit égal à 1000», il se contenta d'exprimer ce problème par une équation de la forme (1); mais alors il ne lui aurait servi à rien d'avoir une équation de la forme (2), dont il ne connaissait pas encore la résolution. Nous verrons plus tard par un autre exemple qu'après avoir découvert les avantages de la forme (2), il sut très bien obtenir cette forme par un choix convenable de l'inconnue.

Cependant ces raisons positives pour regarder comme assez simples à l'époque en question la réduction d'une équation à la forme (2) ne suffisent pas; car M. Cantor, de son côté, croit avoir des raisons historiques et positives pour la regarder comme un pas qui a rencontré de sérieuses difficultés et qui mérite ainsi le titre de progrès important. Il fait observer, en effet, que Cardan, après avoir publié la résolution de l'équation biquadratique

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0,$$

trouvée par son élève Ferrari, n'y fait pas suivre la réduction de l'équation générale

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

par la substitution de $y = \frac{a}{4}$, analogue à celle qui y servait pour les équations cubiques; qu'il a même recours à un autre procédé pour réduire à la première de ces deux formes les équations rencontrées dans ses exemples numériques. Son impuissance à étendre aux équations biquadratiques la méthode qu'il sait appliquer aux équations cubiques, serait donc une véritable preuve des fatigues que lui a coûtées l'invention de cette méthode.

Je ne crois pas que ces conclusions soient bien justifiées. La résolution des équations biquadratiques était trop nouvelle pour en faire une théorie complète, où toute lacune serait un signe d'ignorance. Les efforts pour dire tout ce qu'il y avait de plus essentiel, pourraient même porter à négliger de rendre compte des réductions qu'au besoin on saurait employer sans aucune règle formelle. Cardan voue aux équations trinômes un intérêt qui me semble bien justifié par le fait que la résolution de certaines équations trinômes du troisième degré l'avait conduit à celles d'autres équations du même degré. Il consacre même un chapitre de son *Ars magna* (le septième) à montrer la transformation des équations de la forme

$$x^m + ax^n + b = 0$$

au moyen d'une substitution de la forme $x = \frac{k}{y}$ à la forme

$$y^m + a'y^{m-n} + b' = 0.$$

Il n'est donc pas étonnant que, dans l'exemple cité par M. Cantor, il applique cette transformation à réduire l'équation

$$x^4 + 6x^3 = 64$$

à l'équation

$$y^4 + 6y = 4,$$

qu'il sait résoudre. La simplicité de cette dernière équation suffirait pour expliquer que Cardan l'ait préférée à une autre contenant quatre termes, et dont la résolution par la méthode due à Ferrari demanderait des calculs plus étendus; mais il y en a encore une autre raison. A cette époque on savait bien s'expliquer le sens de solutions négatives lorsqu'elles se présentaient d'elles-mêmes — Cardan le fait avec beaucoup de clarté —; mais ces quantités étaient encore très loin d'être généralement admises. Nous avons déjà vu que les signes différents des coefficients suffisaient pour caractériser des classes différentes d'équations, et lorsqu'on devait transformer une équation, on regardait comme avantageux d'en déduire une dont la racine cherchée fût positive. La transformation $x = \frac{k}{y}$ permet de prévoir les signes des coefficients de l'équation transformée, et en même temps de donner à la racine qu'on cherche le signe qu'on veut.

Suivant nous, la méthode exposée par Cardan pour faire disparaître le second terme d'une équation cubique, est donc un élément indispensable de la théorie qu'il s'était proposé de donner de ces équations; mais cette méthode n'est nullement une nouvelle invention dont il y ait lieu de lui reconnaître un grand mérite personnel. On peut en constater un plus essentiel relativement à sa résolution des équations de la forme

$$x^3 + b = ax. \tag{3}$$

Tout ce que Tartaglia lui avait communiqué sur ces équations — et il l'a fait dans les vers ci-dessus mentionnés — c'est qu'on les résout *par la seconde*, c'est-à-dire par les équations de la forme

$$x^3 = ax + b. \tag{4}$$

La relation qui a lieu entre ces deux équations est celle que nous exprimerions aujourd'hui en disant que leurs racines sont égales au signe près. Aux temps où l'on évitait le plus possible les racines négatives, on devait se servir de l'une des deux équations pour déterminer, sous forme de racines positives, les racines négatives de l'autre. C'est sans doute à cette relation, avec laquelle les équations du second degré avaient pu familiariser, que pense Tartaglia; mais la remarque n'était pas fort utile tant qu'on ne connaissait pas même les relations des racines d'une équation à racines positives, et moins encore celles des racines positives et négatives d'une même équation. Cardan a su surmonter cette difficulté. Soit $x$ une racine de la première et $y$ une racine de la seconde des deux équations; on en déduit par l'élimination de $b$

$$x^3 + y^3 = a(x + y)$$

et ensuite

$$x^2 - xy + y^2 = a,$$

qui permet d'exprimer $x$ au moyen d'$y$:

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4} y^2}. \tag{5}$$

Cardan fait cette réduction par une suite de proportions qui semblent montrer qu'il ne voit pas la simplicité et la généralité de la méthode; mais dans la réalité il fait usage de la même division dont nous nous servons aujourd'hui pour former l'équation servant à déterminer les autres racines d'une équation dans laquelle une racine ($x = -y$) est déjà connue.

Il ne doit pas ce succès à un pur hasard. En effet, il s'était occupé antérieurement de réductions semblables d'équations du troisième degré. Il en a résolu plusieurs dans la *Practica arithmeticæ generalis* (1539) [1]) en les décomposant en deux membres divisibles par la même fonction linéaire de $x$. Il ne pense pas à simplifier cette méthode en rendant l'un des deux membres égal à zéro, qui est divisible par un facteur quelconque, de façon qu'il ne s'agisse que de trouver un facteur de l'autre; mais il connaît l'avantage de la divisibilité. Il sait en profiter là où elle n'est pas trop difficile à découvrir. Il était donc préparé à en faire usage dans le cas qui nous occupe. Plus tard il a continué l'étude de la connexion des différentes racines d'une équation si intimement liée à la divisibilité. Il a trouvé toutes trois les racines de plusieurs équations cubiques,

---

[1]) Voir Cantor, II, p. 457.

sans doute par sa méthode de division (car la résolution générale était encore inconnue dans ce cas irréductible), et il a observé que le coefficient de $x^2$ (placé dans le second membre de l'équation afin de rendre le terme positif) est égal à la somme des trois racines. Il a même étendu cette observation au cas d'une équation, $x^3 = 12x + 16$, à une racine positive (4) et à deux racines égales et négatives ($-2$, qu'il appelle une racine fictive, *ficta*), en disant que la première est égale au double de la seconde; cette remarque résulte immédiatement de la résolution de l'équation (3) dont je viens de parler. Il a fait plus tard allusion à la composition du terme constant par la multiplication des racines.

Ces observations sont faites sur les équations particulières admettant une racine rationnelle, dont il a commencé de s'occuper au plus tard à l'époque où il cherchait en vain les résolutions générales connues par Tartaglia. Cependant on y reconnaît le germe de propositions importantes de la théorie des équations algébriques, et même le premier germe qui nous soit connu hors des équations du second degré. Il en faut faire honneur en tout cas à Cardan; mais quant à la question qui nous occupe, il faut convenir que les progrès faits et les difficultés surmontées sont très loin d'être comparables à la découverte de la nature des racines des équations cubiques générales. On doit même se demander si la principale raison de la priorité de Cardan dans les questions dont nous venons de parler, n'est pas avant tout celle que la communication de Tartaglia lui avait permis d'élaborer et de publier le premier une théorie suivie sur les équations cubiques, et si Tartaglia ne peut avoir été en possession de beaucoup de ces connaissances, qui lui seraient plus difficiles à se revendiquer après la publication de Cardan que ne le seraient des résultats complets et immédiatement applicables.

Pour expliquer comment Tartaglia a pu se laisser devancer par Cardan quant à la publication, nous avons déjà renvoyé aux difficultés que lui faisait le cas irréductible. Ces difficultés expliquent en particulier pourquoi il n'a dit sur la résolution de l'équation $x^3 + b = ax$ rien que les mots déjà cités du vers à Cardan. Quand même il aurait été en pleine possession de la même résolution que nous avons trouvée dans l'œuvre de Cardan, il aurait dû reconnaître qu'elle ne servait qu'à réduire la question à une autre que ni lui ni Cardan ne savaient résoudre. En effet, dans le cas où l'équation (3) a deux racines positives, l'équation (4) a deux racines négatives et une racine positive, ce qui n'a lieu que dans le cas irréductible, de façon qu'on ne savait trouver qu'en des cas particuliers la racine positive de (4), au moyen de laquelle Cardan exprime les deux racines de (3). Ce n'est pas une pure supposition que Tartaglia se soit occupé de questions de cette nature. Il a même montré qu'il en savait tirer les résultats accessibles sans résoudre formellement les équations appartenant au cas irréductible. Il l'a fait par la résolution d'un problème de *maximum* qui se trouve dans la cinquième partie, fol. 88 *verso* de son *General Trattato di numeri et misure* (1560)[1]. Il s'agit de décomposer 8 en deux parties dont le produit multiplié par leur différence ait la valeur *maxima*. Tartaglia en donne la règle suivante — applicable par sa forme aussi au cas où 8 est remplacé par un nombre quelconque $a$ —: «Il faut diviser 8 par deux; le carré de la moitié augmenté de sa 3e partie sera alors égal au carré de la différence des deux parties». Si le nombre donné est égal à $a$, le carré de cette dernière différence sera égal à $\frac{a^2}{3}$. M. Cantor vérifie ce résultat en prenant pour inconnue, $z$, une des deux parties cherchées. Il faut alors la déterminer de manière que

$$z\,(a - z)\,(a - 2z) = 2z^3 - 3az^2 + a^2 z$$

[1]) Malheureusement je n'ai pu consulter immédiatement cet ouvrage; mais l'exactitude des citations de M. Cantor fournit aussi les moyens de contrôler les conclusions qu'il en tire. Cantor, II, p. 487—488.

prenne la valeur *maxima*. La méthode ordinaire du calcul différentiel montre qu'alors $z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{12}}$ et par conséquent $(a - 2z)^2 = \frac{a^2}{3}$, conformément à la règle de Tartaglia.

M. Cantor ajoute que, quant à la démonstration de la règle, Tartaglia se borne à faire remarquer que «sa raison découle de la nouvelle algèbre»; mais il n'essaie nullement de montrer sa connexion avec elle. Au contraire, dans une addition à la seconde partie du même tome, il a accordé une place [1]) à l'essai, dû à M. Reuter, d'une restitution de la démonstration, ayant pour base unique les considérations suivantes: Tartaglia ne possédait aucune «nouvelle algèbre» (M. Reuter regarde donc comme démontré par M. Cantor que Tartaglia a simplement volé la résolution de Scipion del Ferro), mais en tout cas il était très habile géomètre (ce que personne ne conteste). Il a donc probablement résolu son problème par un procédé géométrique.

Il nous semble extrêmement précaire de fonder une restitution sur la distinction qui existe à présent entre l'algèbre et la géométrie. On ne doit pas oublier qu'alors on suivait encore la règle des anciens en donnant aussi une forme géométrique aux opérations algébriques dont on voulait assurer la généralité. Elle aussi, la supériorité géométrique aurait donc été utile à Tartaglia pour surmonter les difficultés algébriques. Aussi la restitution de M. Reuter lui fait-elle représenter et résoudre géométriquement une question algébrique — car c'est bien à l'algèbre que se rattachaient, depuis l'antiquité, les questions de maximum — mais pourquoi donc préférer des considérations géométriques qui n'ont aucun rapport direct avec les autres recherches de Tartaglia ou de ses contemporains, à une simple traduction géométrique de la discussion des équations cubiques, dont en tout cas Tartaglia s'est occupé, et qu'il pouvait

---

[1]) Cantor, II, p. VI—VII.

appeler *la nouvelle algèbre* même dans le cas, supposé par M. Reuter, où il n'y avait personnellement contribué pour rien du tout. L'essai de M. Reuter ne nous donne du reste qu'une restitution de la démonstration du résultat de Tartaglia; quand même cette démonstration nous serait parvenue de la main de Tartaglia, on aurait encore à se demander comment il avait trouvé ce résultat[1]).

Une chose qui semble avoir empêché M. Cantor de voir une connexion, accessible à Tartaglia, de son résultat avec la nouvelle algèbre, c'est la traduction algébrique qu'il fait lui-même du problème dans sa vérification. En prenant pour inconnue une des deux parties, $z$, il fait dépendre le résultat de la discussion de l'équation

$$2z^3 - 3az^2 + a^2z = M,$$

où $M$ doit être un *maximum*. Ne croyant pas Tartaglia capable de faire disparaître de cette équation le terme $z^2$, M. Cantor n'a pu voir son utilité pour le but de Tartaglia. Cependant les paroles citées de Tartaglia montrent qu'il a fait un autre choix de l'inconnue — choix, auquel nous avons déjà fait allusion en parlant de la facilité qu'on avait aussi alors à faire disparaître le terme contenant le carré de l'inconnue. Dans sa règle il nous indique, en effet, la valeur que doit prendre la différence des deux parties (ou le carré de cette différence). En prenant cette différence pour inconnue, on aura à déterminer $x$, en sorte que

$$x\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

soit un *maximum* ou bien que, dans l'équation

---

[1]) J'espère bien que M. Reuter, qui ne prétend pas, que je sache, être historien, voudra bien me pardonner cette critique historique de son essai, intéressant au point de vue géométrique, de démontrer géométriquement le résultat de Tartaglia. Je critique seulement la place que M. Cantor lui accorde et les remarques dans lesquelles il donne comme probable que la démonstration de Tartaglia était aussi loin de s'appuyer sur *la nouvelle algèbre* que le suppose M. Reuter.

$$x(a^2 - x^2) = m \quad \text{ou} \quad x^3 + m = a^2 x, \tag{6}$$

la quantité $m$ en soit une. C'est sur cette forme d'équations que Tartaglia avait donné autrefois dans son vers à Cardan le renvoi laconique aux équations de la forme

$$y^3 = a^2 y + m. \tag{7}$$

Il s'en est donc occupé. De l'autre côté, son impuissance à surmonter les difficultés du cas irréductible l'a empêché de résoudre ces équations pour une valeur quelconque de $m$. Ne sachant s'il en possédait une résolution partielle différente de celle de Cardan, nous montrerons comment celle-ci conduit à son résultat. On en déduit que

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{a^2 - \frac{3}{4} y^2}.$$

Dans le cas limite de la réalité ou possibilité de $x$, qui doit donner à $m$ sa valeur *maxima*, on aura $y^2 = \frac{4}{3} a^2$ et, par conséquent, $x^2 = \frac{a^2}{3}$.

Une autre voie pour résoudre les questions de *maximum* ou *minimum* qui dépendent de la détermination des racines égales d'une équation du troisième degré, lui était du reste ouverte, savoir celle qu'on trouve dans le manuscrit d'Eutocius et qu'on doit probablement à Archimède. Le 12e chapitre de la *Regula Aliza* de Cardan nous montre que cet intéressant exemple de l'algèbre géométrique des anciens était connu alors, et ceux-la même qui ne louent le grand talent géométrique de Tartaglia qu'aux dépens de son talent algébrique, le croiront bien, je suppose, en état d'en profiter mieux que ne le fait Cardan. Pour transcrire l'équation (6) à celle d'Archimède, il suffit d'y prendre pour inconnue la quantité $x^2 = y$, ce qui est encore conforme à l'énoncé de Tartaglia. Il s'agit donc de déterminer la valeur de $y$ en sorte que, dans

$$y(a^2 - y)^2 = m^2, \tag{8}$$

le carré $m^2$ prenne une valeur *minima*, ce qui demande que

$y = \frac{a^2}{3}$. Tartaglia a pu aussi profiter immédiatement des coniques

$$x^2 = y \quad \text{et} \quad x(a^2 - y) = m,$$

servant à résoudre l'une ou l'autre des équations (6) et (8), et des conditions géométriques de leurs contacts trouvées par Archimède.

On voit ainsi qu'il existe même plusieurs méthodes très accessibles à Tartaglia pour déduire son résultat de la théorie des équations cubiques, théorie qu'il appelle *la nouvelle algèbre*; mais alors on ne saurait négliger cet exemple en discutant jusqu'à quel point il a approfondi cette théorie. Quand même il n'aurait fait qu'appliquer la résolution trouvée par Cardan de l'équation $x^3 + b = ax$, et quoiqu'il ne fasse, en tout cas, que suivre l'exemple d'Archimède en étudiant le *diorisme* des équations cubiques, il a fait ainsi un progrès qui ne le cède pas à ceux qu'on trouve dans l'*Ars magna* de Cardan. Il est vrai qu'on en trouve un plus grand nombre dans ce travail élaboré qui a enlevé à Tartaglia le plaisir d'élaborer aussi un ouvrage, tant qu'il ne savait pas en dépasser essentiellement les limites — ce qu'il ne pourrait faire qu'en traitant du cas irréductible.

Nous n'avons parlé ici que d'une partie des progrès mathématiques qui sont dus à Cardan. Il en existe d'autres qu'on doit respecter, même admirer, au milieu d'une production si colossale en des directions très différentes entre elles, mais qui ne regardent guère la question actuelle. M. Cantor a le mérite de les mettre en pleine lumière. Nous en citerons ici son application de l'ancienne règle de deux fausses positions à la résolution approchée d'équations numériques, dont nous avons montré du reste dans notre première *Note* qu'elle avait été employée antérieurement, au moins à l'extraction des racines cubiques. Son explication des racines imaginaires d'une équation quadratique a une grande valeur théorique. Elle est même un précurseur de la résolution du cas irréductible qui est en usage aujourd'hui, et que Bombelli, un des successeurs de Cardan, a essayé d'obtenir par une réduction de la racine cubique de $a + b\sqrt{-1}$ à la même forme; mais en faisant dépendre cette réduction de l'équation qu'il s'agissait de résoudre, il n'a rien contribué à la résolution pratique de l'équation. Ce fut au contraire par de nouvelles applications de méthodes géométriques qu'on réussit enfin à surmonter les difficultés du cas irréductible. On sait que Viète y a été conduit par l'étude de la même figure dont s'est servi Archimède, selon la tradition arabe[1]), pour avoir une résolution mécanique de la trisection de l'angle; il en faisait une application inverse en faisant dépendre les équations cubiques présentant le cas irréductible, de la trisection de l'angle, facile à exécuter numériquement au moyen des tables trigonométriques. On y peut voir la confirmation d'une remarque que j'ai déjà faite, savoir qu'à l'époque en question où l'algèbre exacte et générale dépendait encore plutôt de la géométrie que du calcul, la géométrie possédait les meilleurs moyens de surmonter beaucoup de difficultés qu'on surmonte aujourd'hui par le calcul algébrique; avant tout s'il s'agissait de questions assez générales. Voilà donc pourquoi il ne fallait pas négliger l'habileté géométrique généralement reconnue de Tartaglia en discutant son habileté à faire de grands progrès algébriques.

Ayant été obligé d'allonger ma discussion par quelques détails, je crois bon de résumer ce qui a égard à la question sur les droits de Tartaglia. Selon les documents historiques, Ferro a trouvé le premier la résolution de l'équation $x^3 + ax = b$, et Tartaglia, averti de ce seul fait, l'a retrouvée et y a ajouté la résolution de l'équation $x^3 = ax + b$ (dans le cas réductible). Pour soutenir, ou rendre probable, que Tartaglia n'aurait fait que voler la résolution de Ferro — résolution

[1]) M. Cantor a trouvé que cette tradition devait être inconnue à Viète; mais en tout cas ce savant a été conduit par son étude des *inclinations* (νεύσεις) des anciens à cette application particulière des inclinations.

d'où il était facile de parvenir à celle de l'autre équation —, M. Cantor a donc besoin d'une démonstration particulière. Il le conclut avant tout de l'identité de leurs résolutions. Je dis que cette identité, étant mathématiquement nécessaire, ne prouve rien. M. Cantor renvoie encore au fait que Cardan, qui ne prétend pas avoir inventé ces deux résolutions, a su les étendre et les utiliser beaucoup mieux que Tartaglia, ce qui serait assez singulier, si ce dernier savant avait eu réellement les mérites dont il se vante. Celui des progrès algébriques dus à Cardan, qui est la continuation la plus immédiate des découvertes mentionnées ici, c'est la résolution d'équations cubiques quadrinômes. Montrant que leur réduction aux équations trinômes devait se présenter aussi immédiatement à ceux qui employaient les procédés connus alors qu'à l'algèbre plus moderne, j'ai cru pouvoir regarder cette résolution comme un fruit mûr devant tomber aux mains de quiconque allait continuer sérieusement l'étude des équations cubiques. La résolution que donne Cardan de l'équation $x^3 + b = ax$, n'était pas applicable à des équations à coefficients généraux, tant qu'on ne connaissait pas la résolution de l'équation $x^3 = ax + b$ dans le cas irréductible. Ce qui permettait à Cardan de faire et d'utiliser cette découverte, c'étaient ses études d'exemples d'équations cubiques à une racine rationnelle, et je crois qu'il y a puisé aussi les autres observations fort remarquables qui lui font préparer à plusieurs égards la théorie des équations algébriques d'un degré quelconque.

Quant à Tartaglia, il est difficile de dire jusqu'à quel point des découvertes faites par Cardan lui étaient connues avant la publication qui l'empêcha de les présenter le premier. En tout cas, M. Cantor lui fait tort en n'observant pas la connexion de sa détermination d'une valeur *maxima* avec *la nouvelle algèbre.* Cependant j'avoue que pour expliquer qu'il s'est fait précéder par la publication de Cardan, et que, même plus tard, il n'a pas trouvé lieu de publier une théorie suivie de la résolution des équations cubiques, il ne suffit pas de renvoyer à sa confiance dans le serment de Cardan, et à la circonstance que plus tard Cardan l'aurait prévenu en disant tout ce qu'il avait préparé. Pour suppléer aux lacunes de nos connaissances historiques, j'ai donc eu besoin, aussi de mon côté, d'une hypothèse, mais moins blessante que celle de M. Cantor. J'ai supposé que Tartaglia a été retenu par des vains efforts pour surmonter les difficultés du cas irréductible. Cette hypothèse a l'avantage de donner une explication assez naturelle du défaut étrange de contributions ultérieures de Tartaglia à la théorie des équations cubiques, et de servir en même temps à faire comprendre aussi pourquoi Scipion del Ferro n'avait pas déjà étendu sa résolution de l'équation $x^3 + ax = b$ à $x^3 = ax + b$. A l'appui de cette hypothèse, nous avons renvoyé à l'interruption brusque des communications de Tartaglia au moment où Cardan touche à cette question, et à la nature du problème de *maximum* traité plus tard par Tartaglia. Les efforts réitérés, mais vains de Cardan pour surmonter ces mêmes difficultés, nous montrent qu'en tout cas la question était brûlante.

Nous avons encore fait remarquer que la nature de l'algèbre à l'époque en question nous défend de négliger la grande capacité géométrique de Tartaglia en discutant son habileté de résoudre un problème algébrique.

## III. Sur la signification traditionnelle du mot *géométrique*.

Pour découvrir les connaissances mathématiques d'un temps passé et l'usage qu'on a su en faire, on ne doit ni borner ses recherches de chaque connaissance particulière au milieu dans lequel elle se présente ordinairement aujourd'hui, ni exiger qu'elle revête la forme actuellement usitée. En négligeant cette précaution on a même été en état de démontrer historiquement que telle vérité ou tel instrument géométrique ou analytique étaient inconnus à une époque où l'on savait très bien les appliquer aux mêmes recherches qu'aujourd'hui, mais où seulement il leur manquait encore quelque trait que nous leur attribuons pour des raisons alors non existantes. Il suffit, par exemple, pour démontrer que les anciens ne connaissaient pas les coordonnées, de caractériser cette notion par des attributs inconnus dans l'antiquité. Dans une *Note* insérée dans le présent Bulletin [1]), j'ai essayé de montrer que le seul effet d'une pareille démonstration est de nous ôter un bon moyen de comprendre la nature et la portée des procédés grâce auxquels les anciens géomètres ont pu surmonter de si grandes difficultés.

Les remarques générales que je viens de faire, expliquent les difficultés de trouver la véritable origine de l'algèbre, et en particulier de la résolution des équations du second degré. Si dans l'algèbre on voit avant tout la représentation des opérations par un système complet de notations, cette science doit appartenir aux temps modernes, malgré les commencements de tels systèmes qu'on doit à Diophante et aux géomètres indiens. L'origine arabe du nom qu'on a donné à cette branche des mathématiques, montre toutefois qu'on ne s'est pas posé de si étroites limites. En effet, ce nom d'algèbre est emprunté à un ouvrage de Muhammed ibn Musâ (environ 800 ans ap. J.-C.), qui ne contient rien de ce langage algébrique. L'auteur, qu'on a cru l'inventeur de l'algèbre, donne des règles de calcul pour résoudre les équations du second degré, et les applique à des exemples numériques, après les avoir démontrées par des figures géométriques. C'est seulement plus tard qu'on a découvert que déjà Diophante (environ 300 ans ap. J.-C.) était en possession des mêmes règles. Enfin M. Cantor a reculé la limite de leur connaissance et de leur application jusqu'à Héron.

---

[1]) Année 1888.

En même temps qu'on reculait peu à peu le terme depuis lequel on a su résoudre numériquement les équations du second degré, on savait très bien qu'Euclide avait déjà démontré géométriquement les mêmes résolutions; mais comme il les démontre dans sa géométrie et se contente d'applications purement géométriques, on n'y a vu qu'une opération géométrique dont Euclide et ses contemporains n'auraient pas encore connu l'utilité pour le calcul. Je ne reviendrai pas ici sur toutes les raisons, dues en grande partie à M. Paul Tannery, et qui m'ont porté a croire qu'au contraire les démonstrations d'Euclide sont destinées à embrasser aussi les équations numériques; j'en ai rendu compte soit dans *La théorie des coniques dans l'antiquité*, soit dans mes *Leçons* dernièrement parues. Je me borne à rappeler ici pourquoi une démonstration exacte devait appartenir à la géométrie. C'est parce qu'à elle seule, la géométrie embrassait aussi les quantités irrationnelles, exclues de l'arithmétique, qui n'était que la théorie des nombres entiers et de leurs rapports (fractions rationnelles). Une théorie arithmétique des équations du second degré, qui conduisent en général à des quantités irrationnelles, ne serait donc pas exacte.

Ce que j'ai dit ici de la théorie des équations quadratiques, a lieu aussi pour toute la mathématique pure des anciens. Nous sommes accoutumés à opposer à la géométrie les recherches qui appartiennent à la mathématique pure et reposent à présent sur des généralisations des calculs; pour les Grecs, la géométrie était le seul organe capable de représenter ces recherches d'une manière exacte, tandis que l'arithmétique ancienne n'était capable, pour les raisons déjà mentionnées, d'aucune généralisation de ses calculs. Il est vrai que le 5e livre d'Euclide contient la base d'une théorie des quantités générales sous forme d'une théorie des proportions, et que dans le livre cité Euclide fait usage de la géométrie uniquement en représentant les termes de proportions par des segments de droites; mais cette représentation était nécessaire aux anciens pour exprimer que les termes des proportions pouvaient être des quantités incommensurables aussi bien que des quantités commensurables. Sa nécessité se montre par la relation du 5e au 6e livre, ce dernier contenant, outre les applications géométriques de la théorie des proportions, les compléments indispensables de cette théorie [1]. Par exemple, Euclide ne démontre la détermination d'un terme d'une proportion par les trois autres que par sa construction géométrique, VI, 12. On comprend donc pourquoi cette théorie des proportions, plus générale que la théorie arithmétique consignée au 7e livre, appartenait à la géométrie des anciens. Les anciens font toujours usage des raisons composées du 5e livre pour former les produits et les puissances dont le nombre de dimensions dépasse 2 ou 3, et l'extraction d'une racine cubique est pour eux la construction des deux moyennes géométriques.

On ne saurait mieux caractériser la distinction établie par les anciens Grecs entre les deux catégories: *géométrique* et *arithmétique*, que ne le fait Regiomontanus (1436—1476) en disant que la mathématique, science des quantités, se divise en deux parties, savoir la géométrie et l'arithmétique, suivant que la quantité traitée est continue ou numérique [2].

Cet énoncé nous montre jusqu'à quel point Regiomontanus avait saisi les véritables principes des démonstrations grecques. Étant un des premiers auteurs de son époque pour lesquels la connaissance des auteurs grecs ne se bornait pas à Euclide et à Ptolémée, il est possible qu'il ait pu puiser cette intelligence dans l'étude des travaux originaux des anciens; mais si l'on prend également en considération d'autres mathématiciens arabes et européens, on voit qu'elle appartenait à la tradition mathématique, qui s'est propagée des Arabes aux

---

[1] Voir: *Mathematikens Historie, Oldtid og Middelalder,* p. 130 et suiv.
[2] Cantor: *Geschichte,* II, p. 238.

Européens. Ne connaissant pas d'autres bases d'un système exacte des mathématiques que la géométrie de l'antiquité, on pénétrait mieux jusqu'au fond de ses principes que ne le font souvent nos contemporains, qui mettent toujours en jeu leurs connaissances des mathématiques modernes, et qui n'attendent de trouver dans les anciens écrits aucune idée et aucun procédé que la mathématique actuelle ne mette à leur disposition sous une meilleure forme.

Dans les mathématiques arabes, l'algèbre d'Omar Alkhaïâmî (XI$^e$ siècle) nous offre un exemple de cette manière de voir. Il reconnaît qu'une démonstration arithmétique suffit pour résoudre les équations dans le cas où les racines sont entières, mais ajoute que, pour étendre les résolutions aux cas de racines irrationnelles, il faut recourir aux démonstrations géométriques. Il représente les racines carrées et cubiques par la construction d'une ou deux moyennes harmoniques, et définit les puissances supérieures d'une quantité au moyen de raisons composées.

Que la même manière de voir se retrouve après Regiomontanus, c'est ce que montre l'étude des travaux de Viète. Aussi cet éminent savant, à qui l'on doit l'immense innovation de désigner par une lettre, non seulement une quantité inconnue — ce que faisait déjà Diophante — mais une quantité devant avoir une valeur arbitraire mais donnée, se sert-il de l'antique théorie des proportions, pour avoir des démonstrations d'une généralité bien assurée, et il appelle *géométriques* ces démonstrations.

Considérons par exemple ses deux énoncés de la règle de Tartaglia (Ferro)[1].

*Theorema I: Si A cubus + B plano ter in A æquetur D solido : est B planum quod fit sub lateribus, a quibus qui fiunt cubi, differunt per D solidum, et fit A differentia laterum.*

[1]) *Vietæ Opera,* éd. Schooten, p. 89 et 90.

*Theorema III: Si A cubus, + B plano ter in A æquetur B plano in D : sunt quatuor continue proportionales lineæ rectæ, sub quarum mediis vel extremis fit B planum, differentia vero extremarum est D, et fit differentia mediarum.*

Tout en empruntant la terminologie géométrique et conservant l'homogénéité géométrique, le premier théorème n'énonce qu'une simple règle de calcul, règle qu'en remplaçant respectivement $A$, $B$ et $D$ par $x$, $a$ et $b$, nous exprimerons de la manière suivante:

Pour résoudre l'équation

$$x^3 + 3ax = b,$$

il faut déterminer $u$ et $v$ de manière que

$$uv = a, \quad u^3 - v^3 = b;$$

alors $x = u - v$. Aussi Viète regarde-t-il ce théorème comme arithmétique; son application d'une semblable terminologie aux équations d'un degré supérieur, n'est donc qu'une façon de parler et n'étend nullement la géométrie au delà des trois dimensions de l'espace.

Viète a désigné expressément le théorème III comme un énoncé géométrique du théorème I. Comme il a trouvé commode d'y remplacer la notation $D$ par $BD$, l'équation devient avec notre modification de ses notations,

$$x^3 + 3ax = ab.$$

Le théorème demande alors qu'on détermine $z$, $u$, $v$, $t$ de manière que

$$z : u = u : v = v : t,$$

$$zt \; (= uv) = a,$$

et

$$z - t = b;$$

alors

$$x = u - v.$$

L'identité des deux règles, prétendue par Viète, ressort immédiatement de nos notations; c'est, en effet, une conséquence des proportions — bien connue par les applications antiques des deux moyennes géométriques — que $u^3 = z^2t$,

$v^3 = zt^2$, d'où $u^3 - v^3 = zt(z-t) = ab$. Pour comprendre que Viète puisse appeler géométrique le dernier théorème, il faut remarquer qu'il appelle expressément *lignes droites* (segments de droites) les quatre termes de la proportion continue. $D$ (ou $b$) est immédiatement une droite suivant l'homogénéité de l'équation, et $B$ (ou $a$) est une aire (*planum*). L'équation $uv = a$ demande donc que $u$ et $v$ soient les deux côtés d'un rectangle dont l'aire est connue; mais à cet égard les deux énoncés ne présentent encore aucune différence. Ce n'est que leur manière différente d'exprimer les troisièmes puissances $u^3$ et $v^3$, qui en fait la véritable différence. Dans le premier, Viète donne à ces puissances le nom de cubes, mais sans y attacher aucun sens géométrique: ce sont simplement des produits de trois facteurs égaux. Dans le second, à la manière des anciens, il substitue aux cubes les différents termes d'une proportion continue.

C'est donc l'application de la théorie des proportions qui constitue le caractère géométrique de son théorème III. Pour la même raison Viète regarde comme géométriques une série de lemmes qu'il communique plus tard [1]) sous le titre de: *Syncriticæ doctrinæ Geometrica phrasis.* Ils contiennent des propositions sur des suites de proportions continues dont les termes doivent remplacer des puissances plus élevées.

Viète regarde les démonstrations *géométriques* comme plus exactes que les démonstrations arithmétiques, et il dit expressément pourquoi [2]): *nam etsi radices sint assymmetræ* (incommensurables), *exhibebuntur ea methodo* (la méthode algébrique ou arithmétique) *veris proximæ, accuratas autem exhibere, est Geometræ potius quam Arithmetici.* Dans le cas de racines irrationnelles, c'est la géométrie qui conduit à une détermination exacte, tandis que l'arithmétique conduit à des valeurs approchées. Viète n'avait pas tort; car à son époque la théorie

---

[1]) Vieta, p. 108 et s.

[2]) Vieta, p. 140—141.

de l'arithmétique ne comprenait que les quantités rationnelles. Néanmoins il a trouvé par le calcul la plupart des mêmes transformations et résolutions dont il regarde comme nécessaire de compléter la théorie au moyen de la géométrie, ou plutôt de la théorie des proportions. Seulement les résolutions qui dépendent de la trigonométrie, par exemple celle des équations cubiques appartenant au cas irréductible, ont résulté de recherches géométriques.

Le calcul arithmétique était donc déjà en pratique la base des opérations algébriques. Descartes a le premier osé le prendre aussi pour base théorique de ces opérations. En transportant au calcul l'exactitude qui existait déjà dans la géométrie, il a pu y parvenir sans créer immédiatement de nouveaux éléments d'arithmétique comprenant aussi les quantités irrationnelles. *Je ne crains pas*, dit-il au commencement de sa *Géométrie* [1]), *d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie afin de me rendre plus intelligible.* La géométrie veut dire, encore ici, la mathématique exacte; mais par cette introduction des termes arithmétiques, la mathématique exacte est devenue ensuite une extension de l'arithmétique, quand même les principes de l'ancienne géométrie, et avant tout la théorie des propositions d'Euclide, est restée jusque dans notre siècle la véritable base de son exactitude. Le changement a été facilité par le fait que la seule véritable dépendance qui fît de la théorie des proportions un chapitre de la géométrie, savoir la représentation des termes par des segments de droites, devint superflue lorsqu'on commença de représenter par des lettres les quantités générales, incommensurables aussi bien que commensurables.

Pour bien comprendre la pensée des auteurs en mathématiques soit parmi les Arabes, soit durant la Renaissance; pour voir la portée qu'ont réellement leurs règles et démonstrations

---

[1]) *Nouvelle édition*, 1886, p. 2.

et celle qu'on leur attribuait alors, on doit prendre en grande considération le rôle qu'y joue l'emploi traditionnel de la géométrie; mais même pour comprendre les relations des faits de ces époques, il faut faire attention au sens qu'on attribuait aux mots *géométrie* et *géométrique.*

L'algébriste arabe Ibn Albannâ (vers la fin du XIII^e siècle) dit[1]) que la méthode des deux fausses positions, qui n'est qu'une simple règle de calcul[2]), dépend de la géométrie. On a essayé d'expliquer cette remarque de deux manières différentes, soit philologiquement, soit mathématiquement.

Woepcke renvoie[3]) à la similitude des mots arabes *handasa:* géométrie, et *hindî:* indien, et prétend que les mots seraient originairement identiques et signifieraient «art indien»: Ibn Albannâ aurait voulu dire seulement que la règle des deux fausses positions est d'origine indienne. M. Matthiesen[4]) fait remarquer, de son côté, qu'il est très facile de représenter géométriquement cette règle. Elle sert, si l'on connaît les valeurs, $y_1$ et $y_2$, d'$y$ qui correspondent, dans une équation de la forme

$$y = ax + b,$$

à deux valeurs données, $x_1$ et $x_2$, d'$x$, à déterminer la valeur d'$x$ qui correspond à une valeur donnée d'$y$. La droite représentée par cette équation dans un système de coordonnées ordinaires peut donc servir à démontrer géométriquement cette règle. La droite sera déterminée par les points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$, et il est facile de déduire de cette figure la proportion dont dépend la règle. Les Arabes possédaient parfaitement les moyens d'effectuer cette déduction géométrique. On pourrait dont conclure de la remarque d'Ibn Albannâ qu'ils en ont fait usage réellement.

---

1) Le *Talchys d'Ibn Albannâ,* publié et traduit par Aristide Marre, p. 5. J'emprunte cette citation aux autres auteurs cités ici.

2) Voir ce Bulletin, p. 14.

3) Journal Asiatique 1863, p. 505 et suiv.

4) *Grundzüge der antiken und modernen Algebra,* p. 924—926.

M. Cantor[1]), qui rapporte ces deux explications, y fait deux justes objections. Contre la première explication, il fait remarquer qu'elle implique l'hypothèse que les Arabes auraient regardé la géométrie comme étant d'origine indienne, tandis qu'au contraire c'était toujours aux Grecs qu'ils en rendaient l'honneur, et dûment. Quant à celle de M. Matthiesen, il renvoie au fait qu'il n'existe aucune autre raison historique et positive pour attribuer aux Arabes, et en particulier à Ibn Albannâ, la représentation géométrique qu'elle lui attribue. M. Cantor s'abstient pourtant de substituer d'autres hypothèses à celles qu'il critique; mais il convient qu'il reste ici quelque chose à expliquer.

Je crois que, sans aucune hypothèse, on aura l'explication cherchée, si l'on se contente simplement d'avoir égard à la portée attribuée alors à la géométrie. Tout le monde conviendra que la règle de deux fausses positions dépend des proportions. Or, la théorie des proportions faisait alors partie de la géométrie. Donc, la remarque que la règle citée dépend de la géométrie, n'a besoin d'aucun commentaire ultérieur.

Comme je consultais, avant de publier cette explication, le mémoire déjà cité de Woepcke, j'y ai retrouvé mes deux prémisses dans les expressions dont se sert Alḳalṣâdî, commentateur d'Ibn Albannâ. Il dit en effet à l'occasion de l'endroit en question: *Ceci* (la règle de deux fausses positions) *est la seconde espèce d'opérations fondées sur la proportion*, et il explique l'apparition de deux figures (représentant des balances) en disant que l'auteur était préoccupé de géométrie.

Mon explication s'accorde aussi parfaitement avec la démonstration par laquelle Léonard de Pise établit la règle de deux fausses positions[2]). Cet élève des Arabes, d'une

---

[1]) *Geschichte der Mathematik,* I, p. 694.

[2]) Leonardo Pisano: *Liber Abaci,* éd. Boncompagni, p. 320.

génération antérieure à Ibn Albannà, réduit cette règle à des proportions dont il représente les termes par des segments de droites, à l'instar d'Euclide, sans se servir, comme le fait M. Matthiesen, d'aucune construction particulière pour en montrer la proportionnalité. Néanmoins, dans sa préface, il appelle géométriques les figures dont il se sert ici et dans plusieurs autres démonstrations [1]. Il semble même appliquer l'expression *géométrique* tout particulièrement à la démonstration de la règle de deux fausses positions, si toutefois M. Cantor a raison en supposant que le *modus indorum* auquel il s'intéresse si vivement, soit précisément cette règle, ce qui est fort probable.

De nos jours, la géométrie pure n'est plus le seul organe des mathématiques pures et générales. En représentant les quantités générales et les opérations qu'on leur fait subir, par des lettres et des calculs, on regarde plutôt les quantités géométriques comme des quantités particulières, souvent même la géométrie comme une application ou, tout au plus, comme une illustration des mathématiques pures. Néanmoins on trouve encore quelques restes de l'ancienne notion de la géométrie. Par exemple, en français, on appelle toujours *géomètre* celui qui réellement cultive les mathématiques sans se contenter de démonstrations empiriques; c'est en souvenir d'un temps où, à elles seules, les démonstrations géométriques étaient générales. On peut parler d'un éminent géomètre qui évite toute démonstration géométrique, ou même dire que tel savant, précisément dans sa qualité de véritable géomètre, ne se contente

---

[1]) *Et que arismetica et geometria scientia sunt connexe, et suffragatorie sibi ad inuicem, non potest de numero plena tradi doctrina, nisi intersecantur geometrica quedam, uel ad geometriam spectantia, que hic tantum juxta modum numerj operantur; qui modus est sumptus ex multis probationibus et demonstrationibus que figuris geometricis fiunt — — — — — — — Quare amplectens strictius ipsum modum indorum et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens et quedam etiam ex subtilitatibus euclidis geometrice artis apponens — — — — Liber Abaci,* p. 1.

pas d'une démonstration géométrique. En effet, la valeur d'une démonstration dépend essentiellement de la sûreté de la base sur laquelle elle repose. Durant la Renaissance, la démonstration géométrique était la meilleure, parce qu'elle s'appuyait sur les doctrines si bien établies des anciens, y compris leur théorie des proportions. A présent, au contraire, beaucoup des doctrines qui doivent faire la base des démonstrations, sont plus complètement développées dans une analyse qui a pour point de départ les notions arithmétiques.

Les anciens rapports de la géométrie et de l'arithmétique ont aussi laissé leurs traces dans l'enseignement élémentaire actuel. Dans les applications des proportions à la géométrie, on a expressément égard au cas possible où les différents termes seraient incommensurables. En arithmétique, au contraire, on donne souvent au rapport $a:b$ une définition qui n'a immédiatement aucun sens, si ce n'est dans le cas où $a$ et $b$ sont commensurables, et néanmoins on applique ensuite la théorie des proportions aussi aux quantités incommensurables.

Dans les éléments, l'exactitude géométrique a donc conservé sur l'exactitude arithmétique la même supériorité qu'elle avait pendant la Renaissance.